

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تبریز



نام درس: روش های رسمی در مهندسی نرم افزار

بخش: منطق مرتبه اول

نام استاد: دکتر مسعود کارگر

اختصار

منطق گزاره‌ای:

PL: Propositional Logic

منطق مرتبه اول:

FOL: First Order Logic

مزایا و معایب منطق گزاره‌ای

- + PL is declarative: pieces of syntax correspond to facts
- + PL allows partial/disjunctive/negated information
(unlike most data structures and databases)
- + Propositional logic is compositional:
meaning of $B1,1 \wedge P1,2$ is derived from meaning of $B1,1$ and of $P1,2$
- + Meaning in propositional logic is context-independent
(unlike natural language, where meaning depends on context)
- Propositional logic has very limited expressive power (unlike natural language)
E.g., cannot say “pits cause breezes in adjacent squares” except by writing one sentence for each square

منطق مرتبه اول

- در حالی که منطق گزاره ای فرض می کند که جهان حاوی حقایق است ، منطق مرتبه اول (مانند زبان طبیعی) فرض می کند که جهان دارای اشیاء، رابطه‌ها و توابع است.
- Objects: people, houses, numbers, theories, Ronald McDonald, colors, baseball games, wars, centuries . . .
- Relations: red, round, bogus, prime, multistoried . . ., brother of, bigger than, inside, part of, has color, occurred after, owns, comes between, . . .
- Functions: father of, best friend, third inning of, one more than, end of . . .

عناصر اصلی در نحو منطق مرتبه اول

Constants	<i>KingJohn, 2, UCB,...</i>
Predicates	<i>Brother, >,...</i>
Functions	<i>Sqrt, LeftLegOf,...</i>
Variables	<i>x, y, a, b,...</i>
Connectives	$\wedge \vee \neg \Rightarrow \Leftrightarrow$
Equality	$=$
Quantifiers	$\forall \exists$

جملات اتمیک

Atomic sentence = $\text{predicate}(\text{term}_1, \dots, \text{term}_n)$
or $\text{term}_1 = \text{term}_2$

Term = $\text{function}(\text{term}_1, \dots, \text{term}_n)$
or *constant* or *variable*

E.g., $\text{Brother}(\text{KingJohn}, \text{RichardTheLionheart})$
> $(\text{Length}(\text{LeftLegOf}(\text{Richard})), \text{Length}(\text{LeftLegOf}(\text{KingJohn})))$

جملات پیچیده

- جملات پیچیده با استفاده از پیوندهای جملات اتمیک ساخته می‌شوند.

$$\neg S, \quad S_1 \wedge S_2, \quad S_1 \vee S_2, \quad S_1 \Rightarrow S_2, \quad S_1 \Leftrightarrow S_2$$

E.g. $Sibling(KingJohn, Richard) \Rightarrow Sibling(Richard, KingJohn)$

$$>(1, 2) \vee \leq(1, 2)$$

$$>(1, 2) \wedge \neg >(1, 2)$$

حقیقت در منطق مرتبه اول

Sentences are true with respect to a model and an interpretation Model contains ≥ 1 objects (domain elements) and relations among them Interpretation specifies referents for

constant symbols $\rightarrow$ objects

predicate symbols $\rightarrow$ relations

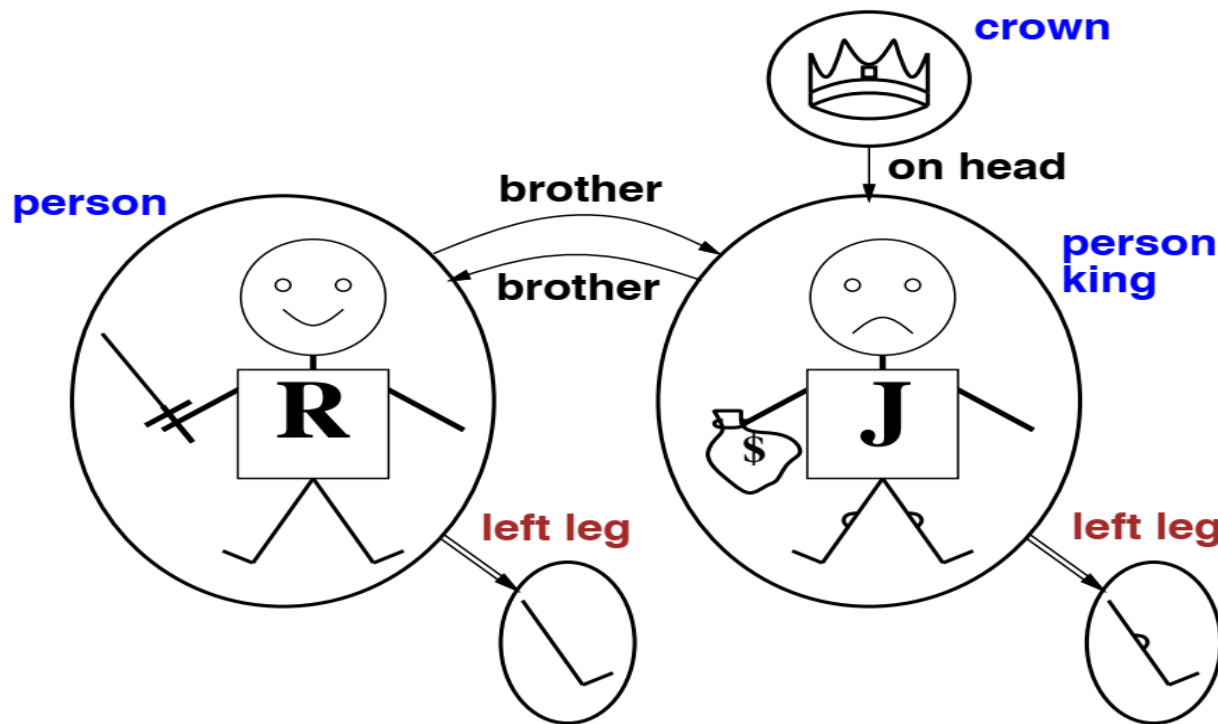
function symbols $\rightarrow$ functional relations

An atomic sentence predicate(term1, . . . , termn) is true iff the objects referred to by term1, . . . , termn are in the relation referred to by predicate

گرامر زبان منطق مرتبه اول

Sentence	::=	AtomicS ComplexS
AtomicS	::=	True False RelationSymb(Term, ...) Term = Term
ComplexS	::=	(Sentence) Sentence Connective Sentence $\neg$ Sentence Quantifier Sentence
Term	::=	FunctionSymb(Term, ...) ConstantSymb Variable
Connective	::=	$\wedge$ $\vee$ $\Rightarrow$ $\leftrightarrow$
Quantifier	::=	$\forall$ Variable $\exists$ Variable
Variable	::=	a b ... x y ...
ConstantSymb	::=	A B ... <i>John</i> 0 1 ... π ...
FunctionSymb	::=	F G ... <i>Cosine</i> <i>Height</i> <i>FatherOf</i> + ...
RelationSymb	::=	P Q ... <i>Red</i> <i>Brother</i> <i>Apple</i> > ...

مثالی از مدل‌های منطق مرتبه اول



■ مثال

■ مدلی با پنج شیء

■ دو رابطه دودویی

■ سه رابطه یکانی

■ یک تا یکانی به نام پای چپ

مثالی برای حقیقت

Consider the interpretation in which

Richard → Richard the Lionheart

John → the evil King John

Brother → the brotherhood relation

Under this interpretation, Brother(Richard, John) is true

just in case Richard the Lionheart and the evil King John are in the brotherhood relation in the model

معناشناسی در منطق مرتبه اول

The semantics of First-Order Logic

(A little) more formally:

An interpretation is a pair (D, σ) where

- D is a set of objects, the universe (or domain);
- σ is mapping from variables to objects in D ;
- C_D is an object in D for every constant symbol C ;
- F_D is a function from D^n to D for every function symbol F of arity n ;
- R_D is a relation over D^n for every relation symbol R of arity n ;

معناشناسی در منطق مرتبه اول

The semantics of First-Order Logic

Let $(\mathcal{D}, \sigma)$ be an interpretation and E an expression of FOL. We write $\llbracket E \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}}$ to denote the *meaning of E in the domain $\mathcal{D}$ under the variable assignment σ* .

The meaning $\llbracket t \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}}$ of a term t is an object of $\mathcal{D}$. It is inductively defined as follows.

$\llbracket x \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}}$	$:=$	$\sigma(x)$	for all variables x
$\llbracket C \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}}$	$:=$	$C^{\mathcal{D}}$	for all constant symbols C
$\llbracket F(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}}$	$:=$	$F^{\mathcal{D}}(\llbracket t_1 \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}})$	for all function symbols F of arity n

مثال برای معناسازی در منطق مرتبه اول

Consider the symbols $MotherOf$, $SchoolOf$, $Bill$ and the interpretation $(\mathcal{D}, \sigma)$ where

$MotherOf^{\mathcal{D}}$ is a unary fn mapping people to their mother

$FchildOf^{\mathcal{D}}$ is a binary fn mapping a couple to their first child

$\sigma := \{x \mapsto \text{George W Bush}, y \mapsto \text{Barbara Bush}\}$

What is the meaning of $\boxed{MotherOf(x)}$ according to $(\mathcal{D}, \sigma)$?

$$\llbracket MotherOf(x) \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}} = \llbracket MotherOf \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}}(\llbracket x \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}}) = MotherOf^{\mathcal{D}}(\sigma(x)) = \text{Barbara Bush}$$

معناشناسی در منطق مرتبه اول

The meaning $\llbracket \varphi \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}}$ of a formula φ is either *True* or *False*.

It is inductively defined as follows.

$\llbracket t_1 = t_2 \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}}$	$:=$	<i>True</i>	iff	$\llbracket t_1 \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}}$ is the same as $\llbracket t_2 \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}}$
$\llbracket R(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}}$	$:=$	<i>True</i>	iff	$\langle \llbracket t_1 \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}} \rangle \in R^{\mathcal{D}}$
$\llbracket \neg \varphi \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}}$	$:=$	<i>True/False</i>	iff	$\llbracket \varphi \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}} = \text{False/True}$
$\llbracket \varphi_1 \vee \varphi_2 \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}}$	$:=$	<i>True</i>	iff	$\llbracket \varphi_1 \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}} = \text{True}$ or $\llbracket \varphi_2 \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}} = \text{True}$
$\llbracket \exists x \varphi \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}}$	$:=$	<i>True</i>	iff	$\llbracket \varphi \rrbracket_{\sigma'}^{\mathcal{D}} = \text{True}$ for some σ' the same as σ except for x

معناشناسی در منطق مرتبه اول

The meaning of formulas built with the other logical symbols can be defined by reduction to the previous symbols.

$$\begin{aligned} \llbracket \varphi_1 \wedge \varphi_2 \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}} &:= \llbracket \neg(\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2) \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}} \\ \llbracket \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}} &:= \llbracket \neg\varphi_1 \vee \varphi_2 \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}} \\ \llbracket \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}} &:= \llbracket (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \varphi_1) \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}} \\ \llbracket \forall x \varphi \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}} &:= \llbracket \neg \exists x \neg \varphi \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}} \end{aligned}$$

If a sentence is closed (no free variables), its meaning does not depend on the variable assignment (although it may depend on the domain):

$$\llbracket \forall x \exists y R(x, y) \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}} = \llbracket \forall x \exists y R(x, y) \rrbracket_{\sigma'}^{\mathcal{D}}, \quad \text{for any } \sigma, \sigma'$$

مدل ها ، اعتبار و ... برای جملات

An interpretation $(\mathcal{D}, \sigma)$ **satisfies** a sentence φ , or is a **model** for φ , if $\llbracket \varphi \rrbracket_{\sigma}^{\mathcal{D}} = \text{True}$.

A sentence is **satisfiable** if it has at least one model.

Examples: $\forall x x \geq y, \quad P(x)$

A sentence is **unsatisfiable** if it has no models.

Examples: $P(x) \wedge \neg P(x), \quad \neg(x = x)$

A sentence φ is **valid** if every interpretation is a model for φ .

Examples: $P(x) \Rightarrow P(x), \quad x = x$

φ is **valid/unsatisfiable** iff $\neg\varphi$ is **unsatisfiable/valid**.

مدل ها ، اعتبار و ... برای مجموعه ای از جملات

An interpretation $(\mathcal{D}, \sigma)$ **satisfies** a set Γ of sentences, or is a **model** for Γ , if it is a model for *every* sentence in Γ .

A set Γ of sentences is **satisfiable** if it has at least one model.

$$\text{Ex: } \{\forall x \, x \geq 0, \forall x \, x + 1 > x\}$$

Γ is **unsatisfiable**, or **inconsistent**, if it has no models.

$$\text{Ex: } \{P(x), \neg P(x)\}$$

As in Propositional Logic, Γ **entails** a sentence φ ($\Gamma \models \varphi$), if every model of Γ is also a model of φ .

$$\text{Ex: } \{\forall x \, P(x) \Rightarrow Q(x), P(A_{10})\} \models Q(A_{10})$$

Note: Again, $\Gamma \models \varphi$ iff $\Gamma \wedge \neg \varphi$ is unsatisfiable.

تفسیرهای احتمالی معانی

Sentences can be seen as constraints on the set S of all possible interpretations.

A sentence denotes all the possible interpretations that satisfy it (the models of ϕ):

If φ_1 denotes a set of interpretations S_1 and φ_2 denotes a set S_2 , then

- $\varphi_1 \vee \varphi_2$ denotes $S_1 \cup S_2$,
- $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ denotes $S_1 \cap S_2$,
- $\neg\varphi_1$ denotes $S \setminus S_1$,
- $\varphi_1 \models \varphi_2$ iff $S_1 \subseteq S_2$.

A sentence denotes either no interpretations or an infinite number of them!

Valid sentences do not tell us anything about the world. They are satisfied by every possible interpretation!

تعداد زیادی مدل برای منطق مرتبه اول

We can enumerate the models for a given FOL sentence:

For each number of universe elements n from 1 to ∞

For each k -ary predicate P_k in the sentence

For each possible k -ary relation on n objects

For each constant symbol C in the sentence

For each one of n objects mapped to C

...

Enumerating models is not going to be easy!

Universal quantification

$\forall \langle variables \rangle \langle sentence \rangle$

Everyone at Berkeley is smart:

$\forall x \text{ } At(x, Berkeley) \Rightarrow Smart(x)$

$\forall x \text{ } P$ is true in a model m iff P is true with x being each possible object in the model

Roughly speaking, equivalent to the conjunction of instantiations of P

$(At(KingJohn, Berkeley) \Rightarrow Smart(KingJohn))$
 $\wedge (At(Richard, Berkeley) \Rightarrow Smart(Richard))$
 $\wedge (At(Berkeley, Berkeley) \Rightarrow Smart(Berkeley))$
 $\wedge \dots$

اجتناب از یک اشتباه رایج

Typically, $\Rightarrow$ is the main connective with $\forall$

Common mistake: using $\wedge$ as the main connective with $\forall$:

$$\forall x \text{ At}(x, \text{Berkeley}) \wedge \text{Smart}(x)$$

means “Everyone is at Berkeley and everyone is smart”

سور وجودی

Existential quantification

$\exists \langle variables \rangle \langle sentence \rangle$

Someone at Stanford is smart:

$\exists x \text{ At}(x, \text{Stanford}) \wedge \text{Smart}(x)$

$\exists x P$ is true in a model m iff P is true with x being **some** possible object in the model

Roughly speaking, equivalent to the disjunction of instantiations of P

$(\text{At}(\text{KingJohn}, \text{Stanford}) \wedge \text{Smart}(\text{KingJohn}))$
 $\vee (\text{At}(\text{Richard}, \text{Stanford}) \wedge \text{Smart}(\text{Richard}))$
 $\vee (\text{At}(\text{Stanford}, \text{Stanford}) \wedge \text{Smart}(\text{Stanford}))$
 $\vee \dots$

اجتناب از یک اشتباه رایج

Typically, $\wedge$ is the main connective with $\exists$

Common mistake: using $\Rightarrow$ as the main connective with $\exists$:

$$\exists x \text{ At}(x, \text{Stanford}) \Rightarrow \text{Smart}(x)$$

is true if there is anyone who is not at Stanford!

خواص سورها

$\forall x \forall y$ is the same as $\forall y \forall x$ (why?)

$\exists x \exists y$ is the same as $\exists y \exists x$ (why?)

$\exists x \forall y$ is **not** the same as $\forall y \exists x$

$\exists x \forall y \text{ Loves}(x, y)$

“There is a person who loves everyone in the world”

$\forall y \exists x \text{ Loves}(x, y)$

“Everyone in the world is loved by at least one person”

Quantifier duality: each can be expressed using the other

$\forall x \text{ Likes}(x, \text{IceCream}) \quad \neg \exists x \neg \text{Likes}(x, \text{IceCream})$

$\exists x \text{ Likes}(x, \text{Broccoli}) \quad \neg \forall x \neg \text{Likes}(x, \text{Broccoli})$

جملات سرگرم کننده

Brothers are siblings

$$\forall x, y \text{ Brother}(x, y) \Rightarrow \text{Sibling}(x, y).$$

“Sibling” is symmetric

$$\forall x, y \text{ Sibling}(x, y) \Leftrightarrow \text{Sibling}(y, x).$$

One's mother is one's female parent

$$\forall x, y \text{ Mother}(x, y) \Leftrightarrow (\text{Female}(x) \wedge \text{Parent}(x, y)).$$

A first cousin is a child of a parent's sibling

$$\forall x, y \text{ FirstCousin}(x, y) \Leftrightarrow \exists p, ps \text{ Parent}(p, x) \wedge \text{Sibling}(ps, p) \wedge \text{Parent}(ps, y)$$

تساوی

$term_1 = term_2$ is true under a given interpretation
if and only if $term_1$ and $term_2$ refer to the same object

E.g., $1 = 2$ and $\forall x \times(Sqrt(x), Sqrt(x)) = x$ are satisfiable
 $2 = 2$ is valid

E.g., definition of (full) *Sibling* in terms of *Parent*:

$$\forall x, y \text{ Sibling}(x, y) \Leftrightarrow [\neg(x = y) \wedge \exists m, f \neg(m = f) \wedge \\ \text{Parent}(m, x) \wedge \text{Parent}(f, x) \wedge \text{Parent}(m, y) \wedge \text{Parent}(f, y)]$$

نحو و معنای منطق رتبه اول

- نمادهای ثابت؛ اشیا را نشان میدهد. مثال: علی، ۲، رضا، ...
- نمادهای محمول؛ رابطه ها را نشان میدهد. مثال: برادر بودن، بزرگتر بودن از
- نمادهای تابع؛ توابع را نشان میدهند. مثال: تابع پای چپ (LeftLeg)
- متغیرها: x, y, a, b
- روابط منطقی: $\neg, \Rightarrow, \wedge, \vee, \Leftrightarrow$
- تساوی: $=$
- سورها: $\forall, \exists$

جملات اتمیک

- هر ترم یک عبارت منطقی است که به شیء اشاره میکند
 - نمادهای ثابت ترم هستند
 - همیشه استفاده از نماد متمایز برای نامگذاری شیء آسان نیست
- پای چپ پای پادشاه John LeftLeg(John)

- جملات اتمیک: ترکیب ترمهای اشیاء و محولهای روابط

- مثال: Married(Father(Richard),Mother(John))
- پدر ریچارد با مادر جان ازدواج کرده است

جملات پیچیده

■ با ترکیب جملات اتمیک و روابط منطقی میتوان جملات پیچیده تری ساخت

$$\neg S, S1 \wedge S2, S1 \vee S2, S1 \Rightarrow S2, S1 \Leftrightarrow S2$$

مثال:

■ $\neg \text{Brother}(\text{LeftLeg}(\text{Richard}), \text{John})$

■ $\text{Brother}(\text{Richard}, \text{John}) \wedge \text{Brother}(\text{John}, \text{Richard})$

■ $\text{King}(\text{Richard}) \vee \text{King}(\text{John})$

■ $\neg \text{King}(\text{Richard}) \Rightarrow \text{King}(\text{John})$

سورها

■ کمک میکنند تا به جای شمارش اشیا از طریق نام آنها، خواص کلکسیون اشیا را بیان کرد

■ سور عمومی؛ $\forall$ “برای همه”

■ سور وجودی؛ $\exists$ “وجود دارد حداقل...”

سور عمومی

<جمله> $\forall$ <متغیرها>

■ $\forall x P$ که در آن P یک عبارت منطقی است، بیان میکند که P برای هر شیء x درست است

■ مثال: $\forall x \text{ King}(x) \Rightarrow \text{Person}(x)$

سور وجودی

<جمله> <متغیرها> $\exists$

■ $\exists x P$ که در آن P یک عبارت منطقی است، بیان میکند که P حداقل برای یک شیء x درست است

■ مثال: $\exists x \text{Crown}(x) \wedge \text{OnHead}(x, \text{John})$

خصوصیات سورها

- $\Rightarrow$ رابط طبیعی برای کار با $\forall$ و $\wedge$ رابط طبیعی برای کار با $\exists$ میباشد
- استفاده از $\wedge$ بعنوان رابط اصلی با $\forall$ منجر به حکم قوی میشود
- استفاده از $\Rightarrow$ با $\exists$ منجر به حکم ضعیفی میشود
- $\forall x \forall y$ برابر است با $\forall x \forall y$ و $\exists x \exists y$ برابر است با $\exists x \exists y$
- $\forall x \forall y$ برابر نیست با $\exists x \forall y$
- $\exists x \forall y \text{ Loves}(x,y)$
- حداقل یک نفر وجود دارد که همه چیز در جهان را دوست دارد
- $\forall y \exists x \text{ Loves}(x,y)$
- همه در دنیا حداقل یک نفر را دوست دارند

خصوصیات سورها

■ “هر کسی بستنی را دوست دارد” به معنای این است که “هیچ کس وجود ندارد که بستنی را دوست نداشته باشد”

■ $\forall x \text{ Likes}(x, \text{IceCream})$ هم ارز $\neg \exists x \neg \text{Likes}(x, \text{IceCream})$

■ $\forall x \neg P$ هم ارز $\neg \exists x P$

■ $\neg \forall x P$ هم ارز $\exists x \neg P$

■ $\forall x P$ هم ارز $\neg \exists x \neg P$

■ $\exists x P$ هم ارز $\neg \forall x \neg P$

تساوی

- با استفاده از = دو ترم به یک شیء اشاره میکنند
- برای تعیین درستی جمله تساوی باید دید که آیا ارجاع ها به دو ترم، اشیای یکسانی اند یا خیر
- مثال: ریچارد حداقل دو برادر دارد
- $\exists x,y \text{ Brother}(x,\text{Richard}) \wedge \text{Brother}(y,\text{Richard}) \wedge \neg(x=y)$

ادعاها و تقاضاها

- جملات از طریق TELL به پایگاه دانش اضافه می‌شوند
- این جملات را ادعا گویند

■ $TELL(KB, King(John))$

■ $TELL(KB, \forall x King(x) \Rightarrow Person(x))$

- با استفاده از ASK تقاضاهایی را از پایگاه دانش انجام می‌دهیم
- این پرسشها، تقاضا یا هدف نام دارد

■ $ASK(KB, Person(John))$

■ $ASK(KB, \exists x Person(x))$

- لیست جانشینی یا انقیاد

- لیستی از جانشینی‌ها در صورت وجود بیش از یک پاسخ

دامنه خویشاوندی

■ مادر هر فرد والد مؤنث آن فرد است

$$\forall m, c \text{ Mother}(c) = m \Leftrightarrow \text{Female}(m) \wedge \text{Parent}(m, c)$$

■ شوهر هر فرد، همسر مذکر آن فرد است

$$\forall w, h \text{ Husband}(h, w) \Leftrightarrow \text{Male}(h) \wedge \text{Spouse}(h, w)$$

■ مذکر و مؤنث بودن طبقه های متمایزی هستند

$$\forall x, \text{Male}(x) \Leftrightarrow \neg \text{Female}(x)$$

■ والد و فرزند، رابطه های معکوس هستند

$$\forall p, c \text{ Parent}(p, c) \Leftrightarrow \text{Child}(c, p)$$

■ پدر بزرگ یا مادر بزرگ والدین والدین هر فرد است

$$\forall g, c \text{ Grandparent}(g, c) \Leftrightarrow \exists p \text{ Parent}(g, p) \wedge \text{Parent}(p, c)$$

اعداد و مجموعه ها

- $\forall s \text{ Set}(s) \Leftrightarrow (s = \{\}) \vee (\exists x, s_2 \text{ Set}(s_2) \wedge s = \{x|s_2\})$
- $\neg \exists x, s \{x|s\} = \{\}$
- $\forall x, s \ x \in s \Leftrightarrow s = \{x|s\}$
- $\forall x, s \ x \in s \Leftrightarrow [\exists y, s_2 \{s = \{y|s_2\} \wedge (x = y \vee x \in s_2))]$
- $\forall s_1, s_2 \ s_1 \subseteq s_2 \Leftrightarrow (\forall x \ x \in s_1 \Rightarrow x \in s_2)$
- $\forall s_1, s_2 \ (s_1 = s_2) \Leftrightarrow (s_1 \subseteq s_2 \wedge s_2 \subseteq s_1)$
- $\forall x, s_1, s_2 \ x \in (s_1 \cap s_2) \Leftrightarrow (x \in s_1 \wedge x \in s_2)$
- $\forall x, s_1, s_2 \ x \in (s_1 \cup s_2) \Leftrightarrow (x \in s_1 \vee x \in s_2)$

مثال

گزاره ای پیدا کنید که جدول ارزش زیر را داشته باشد

p_1	p_2	p_3	$f(p_1, p_2, p_3)$
•	•	•	•
•	•	۱	•
•	۱	•	•
•	۱	۱	۱
۱	•	•	•
۱	•	۱	۱
۱	۱	•	۱
۱	۱	۱	•

$$f(p_1, p_2, p_3) = (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3).$$

بررسی تاتولوژی گزاره‌ها

(تاتولوژی: گزاره همواره درست)

$$1. A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$2. A \wedge B \rightarrow A$$

$$3. A \rightarrow A \vee B$$

$$4. \neg\neg A \leftrightarrow A$$

$$5. (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$6. A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$$

$$7. A \wedge B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C)$$

$$8. (A \vee B) \wedge \neg A \rightarrow B$$

$$9. A \rightarrow (B \wedge \neg B) \rightarrow \neg A$$

$$10. (A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow B) \rightarrow (A \vee C \rightarrow B))$$

■ کدام یک از گزاره‌ها همیشه درست هستند؟

آیا $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ گزاره همیشه درست است؟

A	B	$B \rightarrow A$	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

آیا $A \wedge B \rightarrow A$ گزاره همیشه درست است؟

A	B	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \rightarrow A$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1